

Kapitel 5 Bonus-Material

— Einführung —

Wünschst du dir manchmal mehr Beispiele, Erläuterungen und Kommentare zu den bewusst kurz gehaltenen Beschreibungen der Lektionen? Dann bist du hier genau richtig! Diese Datei enthält Bonus-Material zu einigen Aktivitäten aus Kapitel 5.

Zu den Rätseln findest du viele Beispiele gelöster Aufgaben sowie zusätzliche Hinweise, wie du selbst welche erstellst. Das Programm Early Family Math beruht auf der Idee, dass frühe Mathematik etwas ist, das eine Familie gemeinsam tun sollte – und Rätsel für dein Kind zu bauen, die ihr zusammen löst, gehört wesentlich dazu. Sobald du bei einem Rätseltyp den Dreh raus hast, wirst du merken, dass sich die meisten, wenn nicht alle Rätsel ziemlich leicht selbst erstellen lassen.

Viele dieser Rätsel gibt es in verschiedenen Schwierigkeitsstufen, und auf den nächsten Seiten findest du zahlreiche Vorschläge und Beispiele, wie du diese Stufen gestaltest. Fang immer mit den einfachsten Rätseln an. Es ist weit besser, wenn dein Kind Erfolg, Verständnis und Freude bei etwas zu leichten Rätseln erlebt, als dass es an zu schweren Aufgaben frustriert, entmutigt und überfordert wird. Erst wenn dein Kind Selbstvertrauen und Begeisterung für eine mathematische Aktivität aufgebaut hat, ist der richtige Zeitpunkt, langsam größere Herausforderungen einzubauen. Außerdem macht nicht jedes Rätsel jedem Kind Spaß – dränge also keine Rätsel und Aktivitäten auf, die einfach nicht zünden.

Das findest du auf den folgenden Seiten:

- **Kapitel 5 – Nim mit Teilern**
- **Kapitel 5 – Sieb des Eratosthenes**
- **Kapitel 5 – Hebel und Mobiles**
- **Kapitel 5 – Teile den Kasten auf**
- **Kapitel 5 – Buchstabenrätsel**
- **Kapitel 5 – Erkundungen – Mit Formen spielen**
- **Kapitel 5 – Das Produktspiel**
- **Kapitel 5 – Kaputte Taschenrechner**
- **Kapitel 5 – Doppelt oder nichts**

— Rechtliches —

Jede Familie sollte die Möglichkeit haben, gemeinsam Mathematik zu lernen und Freude daran zu haben. Deshalb ist Early Family Math eine Sammlung von Materialien, die Familien und Lehrkräfte frei bearbeiten, übersetzen, kopieren und weitergeben dürfen – ohne um Erlaubnis zu fragen, ausschließlich für nicht-kommerzielle Zwecke.

Kapitel 5 – Nim mit Teilern

— Einführung —

Beginnt mit einer beliebigen Zahl, zum Beispiel 20. Dein Kind darf entscheiden, ob es anfängt oder als Zweites dran ist. Wer an der Reihe ist, darf einen beliebigen Teiler der aktuellen Zahl von dieser Zahl abziehen. Wer auf 0 gezwungen wird, verliert.

— Analyse —

Wie so oft ist es eine gute Strategie, sich zunächst eine einfachere Version des Spiels anzuschauen – hier also mit ganz kleinen Zahlen zu beginnen. Wenn du am Zug bist und vor einer dieser Zahlen stehst, passiert Folgendes: 1 – verloren, 2 – gewonnen, 3 – verloren, 4 – gewonnen, 5 – verloren, 6 – gewonnen, 7 – verloren und 8 – gewonnen. Spätestens jetzt ist das Muster klar: Bist du am Zug und hast eine ungerade Zahl vor dir, verlierst du; hast du eine gerade Zahl, gewinnst du.

Die Gewinnstrategie zu finden ist schon ein großer Schritt, aber lass uns tiefer graben. Warum funktioniert das? Welche Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen führen zu dieser Situation? Stelle deinem Kind diese Frage und gib ihm viel Zeit, darüber nachzudenken und herumzuprobieren – es gibt keine Eile, und das Ringen mit einer Frage ist unbezahlbar wertvoll und sollte nicht abgekürzt werden.

Ein bisschen Herumprobieren mit kleinen Zahlen zeigt schnell, was passiert. Hast du eine ungerade Zahl, sind alle ihre Teiler ungerade – ziehst du also irgendeinen Teiler ab, kommt eine gerade Zahl heraus. Eine ungerade Zahl im eigenen Zug führt somit immer zu einer geraden Zahl im nächsten Zug. Gerade Zahlen haben dagegen immer sowohl gerade als auch ungerade Teiler, die Lage ist also nicht ganz dieselbe. Hast du jedoch eine gerade Zahl, ist es dein Ziel, deinem Gegenüber eine ungerade Zahl zu übergeben – und das geht ganz einfach: Wähle den Teiler 1 und ziehe ihn ab!

Kapitel 5 – Sieb des Eratosthenes

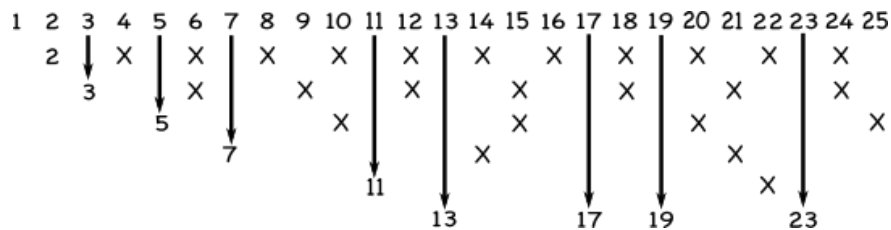
— Einführung —

Beginnt mit einem Zahlenstrahl von 1 bis 25 – oder mit einem größeren Bereich, wenn Platz und Geduld es zulassen.

Schreibe die Zahl 2 unter sich selbst. In der Zeile dieser 2 setzt du unter jedes Vielfache von 2 ein X.

Ziehe nun die erste Zahl herunter, unter der kein X steht (hier die 3), und schreibe sie in die nächste Zeile.

Schreibe die 3 auf und setze in dieser Zeile X unter alle ihre Vielfachen. Mach so weiter. Am Ende hast du alle *Primzahlen* heruntergezogen. Denk daran: Die 1 ist eine *Einheit* und keine Primzahl!



— Analyse —

Dieses einfache Verfahren bringt einige spannende Tatsachen über Primzahlen ans Licht. Schau, ob dein Kind selbst auf einige dieser Fragen kommt – falls sie sich nicht von allein ergeben, hier ein paar Fragen zum Stellen.

1) Warum sind die Zahlen, die heruntergezogen werden, Primzahlen?

Nimm an, du hast eine zusammengesetzte Zahl. Wir wollen zeigen, dass unter dieser Zahl ein X steht. Weil sie zusammengesetzt ist, ist sie durch irgendeine Zahl n teilbar, die zwischen 1 und ihr selbst liegt. Ist n eine Primzahl, dann hat unsere zusammengesetzte Zahl bereits ein X von dieser früheren Primzahl n . Ist n keine Primzahl, dann steht unter n selbst ein X von einer früheren Primzahl, nennen wir sie p . Nun teilt p die Zahl n ohne Rest und n teilt unsere neue Zahl ohne Rest, also muss p auch unsere neue Zahl teilen. Beim Markieren der Vielfachen von p wäre folglich ein X unter unsere neue Zahl gesetzt worden.

2) Wenn du die X für die Vielfachen einer Primzahl setzt, haben manche Zahlen schon ein X von einer früheren Primzahl. Wann passiert das und wann nicht?

Schauen wir uns die Vielfachen von 5 im Sieb oben an. Die Vielfachen 5×2 , 5×3 und 5×4 sind bereits durchgestrichen. Nur 5×5 ist neu. Das liegt daran, dass 5×2 , 5×3 und 5×4 allesamt Vielfache von 2 und 3 sind, also von früheren Primzahlen. Wollen wir X an neue Stellen setzen, müssen wir die 5 mit Zahlen multiplizieren, die nur Primfaktoren ab 5 aufwärts haben. Weil das ein wenig mühsam nachzuhalten ist, streichen manche Leute einfach nur die ungeraden Vielfachen durch und belassen es dabei.

3) Welches war bei diesem Sieb die letzte Primzahl, die in ihrer Zeile ein nützliches neues X hatte?

In diesem Sieb sind die Primzahlen mit nützlichen X die 2, die 3 und die 5. Bei den Vielfachen von 7 und 11 waren alle X schon vorhanden. Wenn du dir die Antwort auf die letzte Frage anschaust, findest du auch hier die Antwort. Neue X bekommt man nur, indem man eine Primzahl mit Primzahlen multipliziert, die größer oder gleich ihr selbst sind. Sobald wir zu einer Primzahl wie 7 kommen, bei der $7 \times 7 > 25$ ist, müssen wir sie nicht mehr prüfen. Wir müssen also nur Primzahlen prüfen, deren Quadrat kleiner oder gleich der letzten Zahl ist.

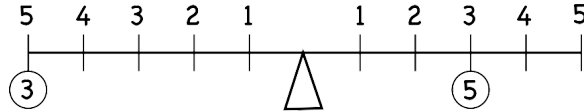
4) Wenn du eine Zahl bekommst, sagen wir 53 – durch welche Primzahlen müsstest du sie teilen, um zu sehen, dass sie eine Primzahl ist?

Nach der Antwort auf die letzte Frage müssen wir nur Primzahlen prüfen, deren Quadrat kleiner oder gleich 53 ist. Das sind 2, 3, 5 und 7 – keine davon teilt 53 ohne Rest, also muss 53 eine Primzahl sein!

Kapitel 5 – Hebel und Mobiles

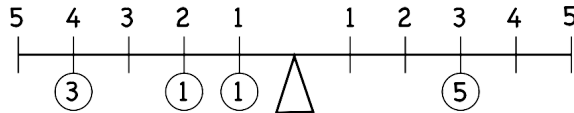
— Hebel —

Das Hebelgesetz besagt, dass die Kraft, die ein Gewicht auf einer Seite des Hebels ausübt, gleich dem Gewicht mal seinem Abstand vom Drehpunkt ist.



Beim Hebel oben hat die 3 auf der linken Seite den Abstand 5 vom Drehpunkt, ihre Kraft ist also $3 \times 5 = 15$. Die 5 auf der rechten Seite hat den Abstand 3, ihre Kraft ist also $5 \times 3 = 15$. Dieser Hebel ist im Gleichgewicht.

Hängt mehr als ein Gewicht auf einer Seite, addieren sich die Kräfte.



Bei diesem Hebel ergibt sich links $3 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ und rechts $5 \times 3 = 15$. Er ist also im Gleichgewicht.

Wir beschränken diese Aufgaben auf ganze Zahlen. Ihr könnt selbst entscheiden, ob mehrere Gewichte an derselben Stelle hängen dürfen – in den folgenden Überlegungen gehen wir davon aus, dass das erlaubt ist.

— Hebelrätsel —

Du hast ein Gewicht mit 3 Einheiten und eines mit 5 Einheiten, die auf entgegengesetzte Seiten des Drehpunkts sollen. Wo müssen sie hängen, damit alles im Gleichgewicht ist? Die Antwort können die Abstände 5 und 3 sein, aber auch 10 und 6 oder noch größere Werte wie 15 und 9. Sei offen dafür, über alles zu sprechen, was deinem Kind einfällt.

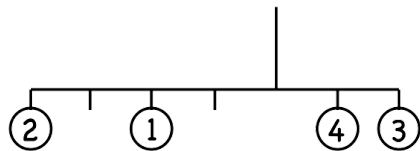
Wenn du ein 3er- und ein 5er-Gewicht auf eine Seite des Hebels hängst – welche Gewichte kannst du dann in welchen Abständen auf die andere Seite hängen? Diese Frage führt die Fragen der Seite „Lass es zählen“ am Ende von Kapitel 4 weiter. Probiert wie zuvor verschiedene Kombinationen von Gewichten aus. Was passiert, wenn 3 und 5 durch 4 und 5, 4 und 9 oder 6 und 9 ersetzt werden?

Wie verändert sich die letzte Aufgabe, wenn wir das 3er- und das 5er-Gewicht auf entgegengesetzte Seiten des Drehpunkts hängen? Jetzt lässt sich ein Gewicht von 1 Einheit leicht abwiegen, nämlich mit $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$. Welche anderen Gewichte kannst du auf diese Weise abwiegen?

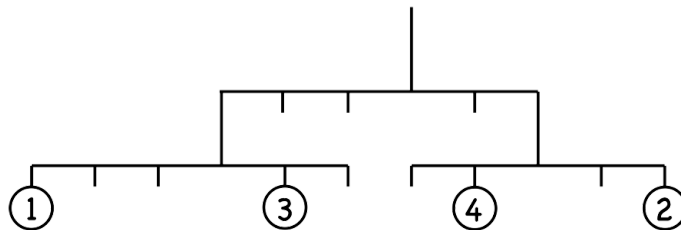
— Mobiles —

Du bekommst einige Gewichte und den Bauplan eines Mobiles mit mehreren Aufhängepunkten. Die Herausforderung: Hänge höchstens ein Gewicht an jeden Punkt, sodass das Mobile an jedem Arm im Gleichgewicht ist. Für diese Aufgaben nehmen wir an, dass die Drähte des Mobiles kein Gewicht haben. Jeder Arm des Mobiles ist ein Hebel, der ausbalanciert werden muss – diese Rätsel sind also eine Erweiterung des Hebel-Gleichgewichts. Übt diese Rätsel, bevor ihr hier anfangt.

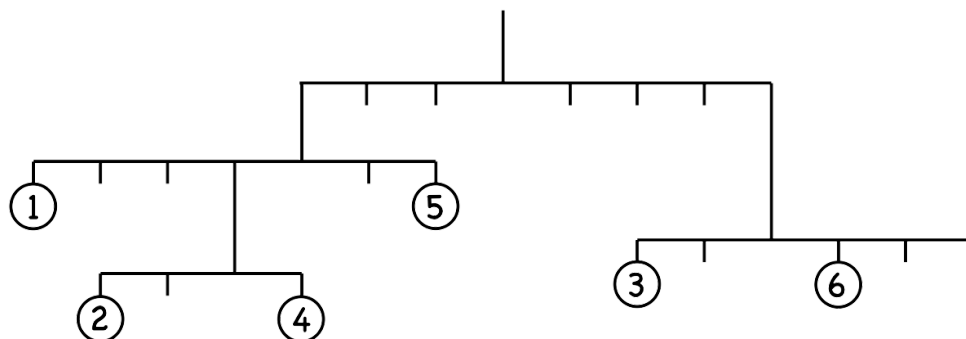
Fangt mit den einfachsten Mobiles an, die einfach nur Hebel in der Luft sind. Hier ist eine Lösung, wie man die Gewichte 1 bis 4 an dieses Mobile hängt, damit es im Gleichgewicht ist. Das funktioniert wie ein Hebel mit dem Drehpunkt am Aufhängepunkt. Für dieses Mobile gilt $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$.



Hat das Mobile mehr als eine Ebene, muss jeder einzelne Arm auf jeder Ebene für sich als Hebel im Gleichgewicht sein. Beim nächsten Mobile sind die beiden unteren Arme ausbalanciert, weil $1 \times 3 = 3 \times 1$ und $4 \times 1 = 2 \times 2$ gilt. Für die nächsthöhere Ebene addierst du einfach die Gewichte darunter. Links sind das zum Beispiel $1 + 3 = 4$ – für die höhere Ebene spielt es keine Rolle, wo genau am unteren Arm die Gewichte hängen. Für die nächste Ebene gilt also $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$, damit ist auch die obere Ebene im Gleichgewicht.



Habt Spaß daran, euch gegenseitig Mobile-Rätsel zu stellen. Hier ist noch eines zum Ausprobieren, bei dem jede der Zahlen von 1 bis 6 vorkommt. Es muss nicht kunstvoll sein und nicht jede Zahl genau einmal verwenden – jedes fertige Rätsel macht Spaß. Prüfen wir die Ebenen: $2 \times 2 = 4 \times 1$; $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$; $3 \times 2 = 6 \times 1$; und $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$.



Kapitel 5 – Teile den Kasten auf

— Einführung —

Ein Rechteck, 4 mal 4 oder größer, in dessen Kästchen einige Zahlen stehen, soll in kleinere Rechtecke aufgeteilt werden. Jede Zahl muss am Ende in einem eigenen Rechteck stehen, dessen Fläche genau diese Zahl ist.

Für Erwachsene ist das Erstellen dieser Rätsel einfach genug: Nimm ein Rechteck, teile es innen in Rechtecke auf, schreibe in jedes innere Rechteck die Zahl seiner Fläche und radiere anschließend alle inneren Linien weg. Der einzige Kniff besteht darin, die Zahlen so zu platzieren, dass das Rätsel einigermaßen gut lösbar bleibt – und falls es doch zu schwer geraten ist, kannst du jederzeit Tipps geben.

— Lösungsstrategien —

Hier sind ein paar allgemeine Strategien, die das Lösen dieser Rätsel erleichtern. Gib dir Mühe, dein Kind diese Regeln beim Spielen selbst entdecken zu lassen. Schreibt gemeinsam eine Liste der Regeln auf, die ihm einfallen.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) Achte auf Zahlen, für deren Rechteck es nur ein oder zwei Möglichkeiten gibt.

Beide 4er sind stark eingeschränkt. Jede 4 kann nur in einem 1-mal-4- oder in einem 2-mal-2-Rechteck liegen. Die obere 4 ist eingekesselt, sie kann also nicht in einem 1-mal-4-Rechteck liegen. Folglich muss in der oberen linken Ecke ein 2-mal-2-Rechteck stehen. Damit bleibt für die untere 4 nur die Möglichkeit, dass ihr Rechteck 1 mal 4 groß ist und entlang der Unterseite verläuft.

2) Achte auf Primzahlen – sie müssen in einem 1-mal-n-Rechteck liegen.

Die 3er im Rätsel oben müssen in einem 1-mal-3-Rechteck stecken. Die 3 in der oberen rechten Ecke kann nur zu einem 1-mal-3-Rechteck gehören, das entlang der Oberkante oder entlang der rechten Seite verläuft. Weil das 2-mal-2-Quadrat oben links schon für die 4 blockiert ist, ist ein 1-mal-3-Rechteck entlang der Oberkante unmöglich.

Das 1-mal-4-Rechteck unten erzwingt, dass das 1-mal-3-Rechteck der unteren der beiden 3er die höhere der beiden senkrechten Möglichkeiten ist.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) Zahlen nahe der größten Abmessung haben oft nur wenige Möglichkeiten.

Schau dir die 6er und 5er im nächsten Rätsel an. Die oberste 6 braucht viel Platz, und der einzige Weg, genug Platz zu finden, führt senkrecht nach unten durch die ganze Spalte. Die andere 6 kann kein 1-mal-6-Rechteck sein, weil ihre Zeile von der Spalte der ersten 6 abgeschnitten wird. Die untere 6 muss also ein 2-mal-3-Rechteck sein, dessen genaue Lage aber noch offen ist.

Ein weiteres Beispiel: Wäre in diesem Rätsel eine 8 vorgekommen, hätte 1 mal 8 nicht hineingepasst – sie müsste also Teil eines 2-mal-4-Rechtecks sein.

4) Eingeschlossene Kästchen haben nur wenige Möglichkeiten.

Die oberste 5 ist eingekesselt, ihre einzige Möglichkeit ist eine Spalte aus 5 Kästchen. Die andere 5 muss, weil sie ebenfalls eine Primzahl ist, senkrecht oder waagerecht liegen. Waagerecht wird sie von der Spalte der 6 abgeschnitten, also muss sie senkrecht nach oben bis direkt unter die 3 verlaufen.

5) Ecken sind oft stark eingeschränkt.

Die 2 in der oberen rechten Ecke muss waagerecht liegen, sie lässt sich also leicht eintragen.

Kapitel 5 – Buchstabenrätsel

— Einführung —

Sobald dein Kind mit den Rätseln „Fehlende Zahl“ von einigen Seiten zuvor in diesem Kapitel vertraut ist, kann es sich an diese Rätsel wagen. Hier werden eine oder mehrere Ziffern durch Buchstaben ersetzt. Die drei Regeln für Buchstaben lauten:

- Ein bestimmter Buchstabe steht immer für dieselbe Ziffer
- Die erste Ziffer einer Zahl ist nie 0
- Verschiedene Buchstaben müssen verschiedene Ziffern sein

Solche Rätsel erstellst du, indem du eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe nimmst und eine oder mehrere Ziffern ersetzt. Du kannst sie auch gezielt so bauen, dass sie für dein Kind zu interessanten Knobelaufgaben werden. Beachte: Die Werte der Buchstaben gelten immer nur innerhalb eines Rätsels und werden nicht auf das nächste übertragen.

— Beispiele —

Das erste Beispiel zeigt, wie du aus einer gewöhnlichen Additions- oder Subtraktionsaufgabe ein Buchstabenrätsel machst. In der ersten Fassung wurden alle 6er durch A ersetzt, in der zweiten Fassung zusätzlich alle 2er durch B.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

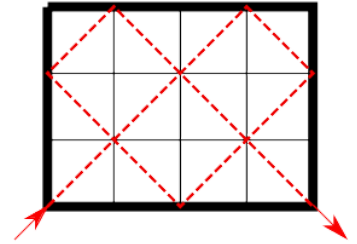
Die übrigen Beispiele sind sorgfältig so gebaut, dass man sie über die Besonderheiten der jeweiligen Situation lösen kann. Eine nützliche Eigenschaft: Wenn du zwei Zahlen addierst, ist der Übertrag in die nächste Spalte immer entweder 0 oder 1. In der Aufgabe $A + A = C4$ muss C also 1 sein, weil es nicht 0 sein darf.

$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array}$	$\begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}$	$\begin{array}{r} D \\ +2 \\ \hline EE \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array}$
$\begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline B2 \end{array}$	$\begin{array}{r} C \\ +C \\ \hline D4 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +7 \\ \hline B \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline B0 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array}$	$\begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array}$
$\begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}$	$\begin{array}{r} AD \\ +BD \\ \hline BCC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +BA \\ \hline BBC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +CB \\ \hline BBC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +AB \\ \hline CAC \end{array}$	$\begin{array}{r} AA \\ +AA \\ \hline BBC \end{array}$

Kapitel 5 – Mit Formen spielen

— Springende Billardkugel – Einführung —

Stell dir einen Billardtisch mit einem Loch in jeder Ecke vor. Prallt eine Kugel an der Bande ab, verlässt sie diese im selben Winkel, in dem sie ankam. Wenn wir eine Kugel aus der unteren linken Ecke in einem 45-Grad-Winkel losschießen – wo landet sie? Die Antwort hängt von der Größe des Tisches ab. Rechts siehst du, was auf einem 3-mal-4-Tisch passiert.



Gib deinem Kind die Zeichnung eines Tisches und fordere es heraus vorherzusagen, welche Ecke zuerst getroffen wird und wie viele Abpraller es bis dorthin braucht.

— Springende Billardkugel – Analyse —

Lass dein Kind zunächst einfach herumprobieren und hab es nicht eilig mit den Ergebnissen. Wie du sehen wirst, steckt in dieser Aufgabe für ein junges Kind ziemlich anspruchsvolles Denken. Stelle bei Bedarf ein bis zwei Fragen, um dem Nachdenken etwas mehr Struktur zu geben. Du weißt schon, was kommt: Schaut euch zuerst einfachere Tische an, um Muster zu finden. Wenn dieser Gedanke für dein Kind zur Selbstverständlichkeit wird, hat es sein Leben lang etwas davon!

Am einfachsten sind Tische der Größe 1 mal n , und sie sind leicht zu durchschauen. Spielt man ein paar Werte für n durch, zeigt sich das Muster schnell. Ein so einfaches Ergebnis unterschätzt man leicht – doch jedes vollständig verstandene Ergebnis ist ein Grund zum Feiern, und dieses hier führt zu weiteren.

Ergebnis: 1-mal- n -Tisch: Die Kugel prallt $n-1$ mal ab. Sie landet in der unteren rechten Ecke, wenn n gerade ist, und in der oberen rechten Ecke, wenn n ungerade ist.

Die nächst einfachen Tische sind 2 mal n . Die Muster sind hier etwas verwickelter. Sauberes Aufschreiben macht bei so etwas einen großen Unterschied. Wer aufmerksam experimentiert, bemerkt, dass sich ein 2-mal-4-Tisch genauso verhält wie ein 1-mal-2-Tisch und ein 2-mal-6-Tisch genauso wie ein 1-mal-3-Tisch. Daraus wird schnell das nächste Ergebnis.

Ergebnis: Ein 2-mal- $2n$ -Tisch verhält sich genauso wie ein 1-mal- n -Tisch.

Warum ist das so? Was steckt dahinter? Das ist genau das mathematische Vorgehen, das du deinem Kind vermitteln willst: nach Mustern suchen, sie dann verstehen wollen und mit diesem neuen Verständnis die bisherigen Ergebnisse erweitern.

Dahinter steckt Folgendes: Die Abpraller auf einem Tisch ändern sich nicht, wenn man beide Seitenlängen mit demselben Faktor vergrößert. Der Tisch wird größer, aber die Geometrie bleibt gleich. In der Geometrie sagt man, die beiden Tische seien „ähnlich“.

Ergebnis: Ein k m-mal- k n-Tisch verhält sich genau wie ein m -mal- n -Tisch.

Wir sind in kleinen Schritten hierhergekommen, aber das ist ein GROSSES Ergebnis. Es bedeutet, dass wir die Untersuchung jedes Tisches damit beginnen können, gemeinsame Faktoren herauszukürzen.

Zurück zu den 2-mal-n-Tischen: Für gerades n wissen wir jetzt, was passiert – aber was ist, wenn n ungerade ist? Was passiert bei 2 mal n für $n = 1, 3, 5, 7$ und so weiter? Das Muster wird schnell sichtbar.

Ergebnis: Ist n ungerade, prallt die Kugel auf einem 2-mal-n-Tisch n mal ab und landet in der oberen linken Ecke.

Ihr kommt gut voran. Weitere Beispiele führen zu weiteren Mustern.

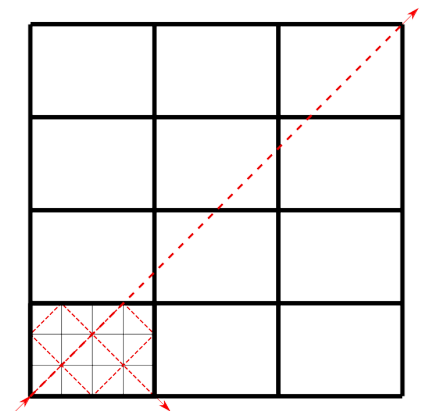
Ergebnis: Ist n kein Vielfaches von 3, prallt die Kugel auf einem 3-mal-n-Tisch $n+1$ mal ab; sie landet in der oberen rechten Ecke, wenn n bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, und in der unteren rechten Ecke, wenn der Rest 2 ist. Ist n ungerade, prallt sie auf einem 4-mal-n-Tisch $n+2$ mal ab und landet in der oberen linken Ecke. Ist n kein Vielfaches von 5, prallt sie auf einem 5-mal-n-Tisch $n+3$ mal ab und landet bei ungeradem n in der oberen rechten und bei geradem n in der unteren rechten Ecke.

An diesem Punkt sind wir versucht, die Daten zu überblicken, Muster zu erkennen und Vermutungen aufzustellen.

Vermutung: Nimm an, k und n haben keine gemeinsamen Faktoren. Dann prallt die Kugel auf einem k-mal-n-Tisch $k + n - 2$ mal ab. Sie landet in der oberen linken Ecke, wenn k gerade ist. Sie landet in der oberen rechten Ecke, wenn k ungerade und n ungerade ist, und in der unteren rechten Ecke, wenn k ungerade und n gerade ist.

Wow – wenn diese Vermutung stimmt, haben wir das Problem vollständig gelöst! Du weißt schon, was jetzt kommt ... Schauen wir, ob wir erklären können, warum die Vermutung stimmen sollte (oder ob sie sich als falsch herausstellt).

Es gibt zwar auch andere Wege, diese Situation zu verstehen, aber wie so oft macht eine neue Idee alles viel leichter. Von selbst kommt man vielleicht nicht darauf, doch wenn man sie einmal sieht, ist man verblüfft: Man klappt den Tisch auf, sodass die Kugel geradeaus laufen kann! So sieht es aus, wenn wir den ursprünglichen 3-mal-4-Tisch aufklappen und den Weg der Kugel zu einer Geraden machen.



Jetzt ist viel leichter zu sehen, dass die Vermutung stimmt. Die Abpraller entsprechen überquerten Linien – in der einen Richtung sind $(k - 1)$ zu überqueren, in der anderen $(n - 1)$, zusammen also $(k - 1) + (n - 1) = k + n - 2$ Linien. Welche Ecke am Ende getroffen wird, ist nur eine Frage der Aufmerksamkeit. Damit sind wir am Ende einer richtig spannenden Reise angekommen.

— Flächen mit Formen auslegen – Einführung —

Angenommen, du hast ein 8-mal-8-Schachbrett und eine Sammlung von 1-mal-2-Steinen. Einen Weg zu finden, das Brett mit genau 32 dieser Steine lückenlos zu bedecken, ist einfach genug.

Nehmen wir nun ein paar Felder vom Schachbrett weg und schauen, was passiert. Entfernst du eine Ecke, weißt du sofort, dass sich das Brett nicht mehr auslegen lässt: Die Steine bedecken immer eine gerade Anzahl von Feldern, und jetzt sind es 63. Gut – entferne zwei Ecken, damit die Zahl der übrigen Felder wieder gerade ist. Geht es jetzt? Die Antwort hängt davon ab, welche zwei Ecken du entfernst. Warum? Und was passiert, wenn du dich nicht mehr auf Ecken beschränkst?

— Flächen mit Formen auslegen – Analyse —

Lass dein Kind damit spielen, bevor du die Idee mit der Färbung verrätst. Wenn es an kleinen Brettern herumprobiert, entdeckt es die Regel vielleicht selbst – und das ist immer besser.

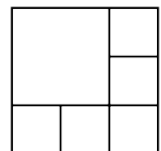
Sehr hilfreich bei dieser Frage ist die Färbung der Schachbrettfelder. Färbst du bei den 1-mal-2-Steinen ein Feld weiß und das andere schwarz, geschieht etwas Interessantes: Jeder Stein muss ein Feld von jeder Farbe bedecken. k Steine bedecken also nicht nur $2k$ Felder, sondern k weiße und k schwarze – von jeder Farbe gleich viele. Mit dieser Idee wird sofort klar: Entfernst du von einer Farbe mehr Felder als von der anderen, lässt sich das Brett unmöglich auslegen.

Wenn deinem Kind diese Fragen Spaß machen, probiert auch andere Formen zum Auslegen aus. Spielt damit, das Brett mit 1-mal-3-Steinen oder mit 3 Feldern in L-Form zu füllen. Welche Muster und Regeln entdeckt ihr dabei? Welche anderen Formen wären noch spannend?

— Quadrate mit Quadraten auslegen – Einführung —

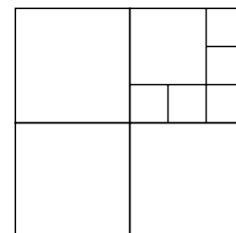
Auf welche Arten kannst du ein Quadrat mit anderen Quadraten füllen, wobei diese nicht alle gleich groß sein müssen? Die Seitenlängen dürfen allerdings nicht völlig beliebig sein – jede Seitenlänge muss ein ganzzahliges Vielfaches einer festen Länge sein. Die Frage lautet: Welche Anzahlen von Quadraten sind überhaupt möglich? Und wenn du weißt, dass eine Anzahl möglich ist – gibt es eine einfache Beschreibung, wie man sie hinbekommt?

Lass dein Kind über viele Tage hinweg damit spielen und hab es nicht eilig mit der Antwort. Es gibt viele verschiedene Wege, auf Ideen für diese Erkundung zu kommen – bleib also flexibel und arbeite mit den Einfällen deines Kindes. Hier ist eine Zeichnung, die zeigt, wie 6 möglich ist.



Ein paar schnelle Beispiele zu sammeln ist immer eine gute Idee. Das große Quadrat in gleich große Quadrate zu zerlegen ist ein einfacher Anfang. Damit weißt du schon, dass alle Quadratzahlen (1, 4, 9, 16, 25, ...) funktionieren.

Ausgehend vom Beispiel mit 6 Quadraten können wir ein großes Quadrat beliebiger Größe nehmen und an zwei seiner Seiten 1-mal-1-Quadrate legen. Machen wir das für immer größere Quadrate (1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3, ...), erhalten wir $1 + 3 = 4$, $1 + 5 = 6$ (wie abgebildet), $1 + 7 = 8$, $1 + 9 = 10$ und so weiter. Alle geraden Zahlen ab 4 lassen sich also auf diesem Weg erreichen.



Eine starke Idee, die das Ganze schnell zum Abschluss bringt: Wir können eine funktionierende Darstellung nehmen und eines ihrer Quadrate durch eine andere funktionierende Darstellung ersetzen. Nimmst du zum Beispiel ein einfaches 2-mal-2-Quadrat, gefüllt mit vier 1-mal-1-Quadraten, und ersetzt eines dieser kleinen Quadrate durch das Beispiel mit 6 Quadraten, erhältst du die Zeichnung rechts mit 9 Quadraten.

Weil ein Quadrat durch eine Darstellung mit n Quadraten ersetzt wird, ändert sich die Gesamtzahl um $n-1$ Quadrate. Das heißt: Wir können eine funktionierende Zahl nehmen und zu jeder anderen funktionierenden Zahl Vielfache von eins weniger als dieser Zahl addieren. Insbesondere können wir zu jeder funktionierenden Zahl Vielfache von $4 - 1 = 3$ addieren – und am leichtesten addiert man 3 zu allen geraden Zahlen ab 4.

Alles zusammengekommen bedeutet das: Die Zahlen 1, 4, 6, 7, 8, 9, ... funktionieren alle, und man sieht jeweils mindestens einen einfachen Weg, sie zu bauen. Ebenso leicht überzeugt man sich davon, dass 2, 3 und 5 unmöglich sind.

Wenn dein Kind Freude an dieser Frage hat, erkundet Abwandlungen davon. Angenommen, ihr erlaubt nur bestimmte Quadratgrößen – etwa 1 mal 1, 2 mal 2 und 3 mal 3. Oder vielleicht nur 2 mal 2 und 3 mal 3. Schaut, welche Fragen zu interessanten Ergebnissen führen und welche eher nicht.

Eine weitere Richtung ist, andere Figuren mit Figuren derselben Form auszulegen. Stellt zum Beispiel dieselbe Frage für gleichseitige Dreiecke (Dreiecke, bei denen alle Seiten gleich lang sind). Manche Figuren sind auf diese Weise spannend zu untersuchen, andere überhaupt nicht – welche?

Kapitel 5 – Das Produktspiel

— Einführung —

Verwendet ein gemeinsames Blatt Papier, das so aussieht:

Die erste Spielerin oder der erste Spieler legt einen Spielstein auf eine beliebige Zahl von 1 bis 9 in der Reihe der 1-9-Felder unten. Die zweite Person legt einen weiteren Stein auf eines der 1-9-Felder unten und beansprucht das Produkt im 6-mal-6-Gitter. Von da an entscheidet ihr abwechselnd, welchen der beiden Steine ihr bewegt, und beansprucht das jeweilige Produkt (falls möglich). Wer zuerst 3 Felder in einer Reihe besetzt, gewinnt. Mische die Produktzahlen im 6-mal-6-Gitter durcheinander, damit dein Kind das Erkennen der Produkte besser übt.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Diese Spielfelder lassen sich beliebig groß machen, auch wenn sie ziemlich schnell ziemlich groß werden. Hier sind ein paar größere Bretter mit den passenden größeren Zahlenbereichen darunter.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Die Felder mit roten Sternen sind „freie“ Felder und dürfen von beiden Seiten nach Bedarf genutzt werden.

Kapitel 5 – Kaputte Taschenrechner

— Einführung —

Stell dir vor, du hast einen schwer beschädigten Taschenrechner und sollst damit trotzdem ein bestimmtes Ergebnis erzeugen. Du kannst dir sehr viele Szenarien ausdenken, die mit einer kurzen Beschreibung zu interessanten Aufgaben werden. Diese Aktivität lässt sich leicht mündlich spielen, wann immer ihr einen freien Moment habt. Hier sind ein paar Beispiele für den Anfang.

Auch wenn an manchen Stellen tiefere Mathematik im Spiel ist, geht es bei diesen Aufgaben vor allem um den Spaß am Herumprobieren.

1a) Angenommen, du hast einen Taschenrechner mit +, -, x und /, aber nur eine funktionierende Zifferntaste, die 4. Könntest du das Ergebnis 21 erzeugen? Und wenn ja, mit wie wenigen Schritten?

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$ ist ein Weg, aber es gibt viele andere. Ein weiterer ist $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$. Das Ziel ist, herumzuprobieren und das Erkunden zu genießen.

1b) Angenommen, du dürftest die 4 höchstens viermal verwenden – welche Zahlen könntest du erzeugen? Und angenommen, du müsstest die 4 genau viermal verwenden.

Je mehr mathematische Mittel ein Kind hat, desto reizvoller wird das Vier-Vieren-Problem. Im Moment sind die Möglichkeiten deines Kindes noch recht begrenzt, aber das Herumprobieren macht trotzdem viel Spaß. Viele Zahlen werden ohne Division oder Kommazahlen besonders schwierig. Achtet nicht darauf, alle Zahlen der Reihe nach zu finden – sammelt einfach so viele verschiedene Zahlen wie möglich.

Hier sind ein paar Beispiele für den Anfang.

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44 / 44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44 / 4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) Probiert es auch mit anderen einzelnen Ziffern und anderen Zielergebnissen aus.

2a) Angenommen, dein Taschenrechner könnte nur 4 oder 7 addieren. Welche Zahlen könntest du erzeugen?

Das ist das Ergebnis, das uns inzwischen mehrfach begegnet ist. Ab $(4 - 1) \times (7 - 1)$ erreichst du alle Zahlen, indem du Vielfache von 4 und 7 addierst: $18 = 2 \times 7 + 4$, $19 = 3 \times 4 + 7$, $20 = 5 \times 4$, $21 = 3 \times 7$ und so weiter.

2b) Angenommen, er hätte 4 oder 7, könnte aber addieren und subtrahieren. Welche Zahlen könntest du erzeugen?

Auf diese Weise kannst du alle Zahlen erzeugen.

2c) Ersetzt 4 und 7 durch andere Zahlenpaare. Was passiert bei diesen Paaren?

In der Zahlentheorie ist dies als Satz des Bézout bekannt. Das Ergebnis besagt, dass man durch Kombinieren von Vielfachen zweier Zahlen jedes Vielfache ihres größten gemeinsamen Teilers erzeugen kann.

3) Angenommen, du hättest nur eine 1-Taste und könntest nur addieren oder verdoppeln. Zum Beispiel ergibt $2 \times (2 \times 1) + 1$ die Zahl 5. Welche anderen Zahlen kannst du erzeugen?

Das ist in Wahrheit eine Frage über Binärzahlen. Dein Kind muss das weder erkennen noch verstehen, es geht nur ums Spielen. Jede Zahl lässt sich binär schreiben, also lassen sich alle Zahlen durch Verdoppeln und Addieren von 1 erreichen. Zum Beispiel ist $21 = 16 + 4 + 1$. Also $21 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0 + 1$.

Kapitel 5 – Doppelt oder nichts

— Einführung —

Zu Beginn wählt jede Person heimlich 5 verschiedene Zahlen, die größer als 20 und höchstens 120 sind. Danach werden sie für alle sichtbar aufgeschrieben. Mit Zahlenkarten oder einem anderen Hilfsmittel wird eine Zufallszahl von 1 bis 20 erzeugt. Diese Zahl wird so lange verdoppelt, bis entweder zum ersten Mal die Zahl einer Person getroffen wird oder die Zahl größer als 120 ist. Wer zuerst alle fünf Zahlen getroffen hat, gewinnt.

— Analyse —

Die Frage lautet: Welche fünf Zahlen wählt man am besten? Hier sind ein paar Überlegungen dazu.

Regel: Wähle immer eine Zahl, die eine Zweierpotenz mal eine Zahl von 1 bis 20 ist.

Wählst du eine Zahl wie 23 oder 46, kann sie nie getroffen werden und du verlierst mit Sicherheit.

Regel: Wähle nie eine Zahl, die das Doppelte einer anderen Zahl ist, die du hättest wählen können, aber nicht gewählt hast.

Wenn du 44 wählst – warum nicht gleich 22? Wählt die andere Person die 22, verpasst du eine Runde.

Weitere Analyse: Die Zahlen von 1 bis 20 werden alle gleich wahrscheinlich gezogen. Weil aber 9 zu 18 führt, ist 18 doppelt so wahrscheinlich als Ausgangspunkt wie etwa 11. Fasst man die Wege zu den verschiedenen Startpunkten zusammen, ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

11 - 1/20 (aus 11)

12 - 3/20 (aus 3, 6 und 12)

13 - 1/20 (aus 13)

14 - 2/20 (aus 7 und 14)

15 - 1/20 (aus 15)

16 - 5/20 (aus 1, 2, 4, 8 und 16)

17 - 1/20 (aus 17)

18 - 2/20 (aus 9 und 18)

19 - 1/20 (aus 19)

20 - 3/20 (aus 5, 10 und 20)

Die besten Zahlen sind offensichtlich Vielfache von 16, 12 und 20. Eine einfache Strategie ist, diese fünf Zahlen zu nehmen: 32, 64, 24, 48 und 40. Sie gewinnen nicht immer, aber auf Dauer solltest du damit sehr gut fahren.